03.03.2016

Ορισμός: Η ομάδα $(G,*)$ καλείται Αβελιανή ↔

$\forall \; x*y = y*x$

- Το στοιχείο e, όπου G: σύνολο του αξιώματος 2 καλείται ουδέτερο ή ταυτοτικό στοιχείο της G και είναι μοναδικό

- Για κάθε $x \in G$ το στοιχείο $x \in G$ το στοιχείο x' του αξιώματος ③ καλείται αντίστροφο ή αντίθετο στοιχείο του x, και είναι μοναδικό.

Παραδείγματα:

① Αν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, τότε το ζεύγος $(\mathbb{K}, +)$, όπου $+$: συνήθης πράξη πρόσθεσης, είναι μια αβελιανή ομάδα. (το ουδέτερο στοιχείο είναι το 0 και το αντίθετο το $x \in \mathbb{K}$, είναι το $-x$)

② • Το ζεύγος $(\{1,-1\}, \cdot)$ είναι αβελιανή Ομάδα

• Αν $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, όπου $\mathbb{K} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, τότε το ζεύγος $(\mathbb{K}^*, \cdot)$, όπου $\cdot$ είναι ο σύνηθης πολ/μος, είναι αβελιανή ομάδα.

③ Ομάδες Μεταθέσεων: Έστω $X \neq \emptyset$, ένα μη-κενό σύνολο και έστω $S(x) = \{f : x \to x \mid f : \overset{1-1}{\text{επί}}\}$

Τότε το ζεύγος $(S(X), \circ)$ είναι ομάδα ($\circ$: είναι η σύνθεση απεικονίσεων), η οποία είναι αβελιανή $\Leftrightarrow |X| \leq 2$
Το ουδέτερο στοιχείο είναι η ταυτοτική απεικόνιση $Id_X : X \to X$, $Id_X(x) = x$. Το αντίστροφο στοιχείο της $f \in S(X)$, είναι η f^{-1}

4) Αν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, τότε έστω $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n \times n} \mid$ Αντιστρέψιμος$\}$
Αν $A, B \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \exists A^{-1} B^{-1}$ και τότε $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$

Τότε το ζεύγος $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$, όπου $\cdot$: συνήθης πολ/μος πινάκων είναι μια ομάδα. Το ουδέτερο στοιχείο είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n και το αντίστροφο στοιχείο του $A \in GL_n(\mathbb{K})$ είναι ο A^{-1}

Η ομάδα $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ καλείται γενική γραμμική ομάδα τάξης n

- Αν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, τότε $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow |A| \neq 0$. Τότε η $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ είναι αβελιανή $\Leftrightarrow n = 1$

"$\Leftarrow$" Αν $n = 1$, τότε $GL_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$, και όπως έχουμε δει, το ζεύγος $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ είναι αβελιανή

"$\Rightarrow$" Υποθέτουμε, ότι $n \geq 2$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 3 \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad |B|=1 \Rightarrow B\in GL_n(\mathbb{K})$$

$$(A\cdot B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \neq B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

5) Έστω $\mathbb{Q}^{>0}=\{x\in\mathbb{Q} \mid x>0\}$. Ορίζουμε πράξη επί του $\mathbb{Q}^{>0}$ ως εξής $\forall\, x,y \in \mathbb{Q}^{>0}$: $x*y=\frac{x\cdot y}{2}$.

Τότε το ζεύγος $(\mathbb{Q}^{>0},*)$ αβελιανή ομάδα.

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ x*(y*z)=x*\frac{yz}{2}=\frac{x\cdot y\cdot z}{4} \\ &\bullet\ (x*y)*z=\frac{xy}{2}*z=\frac{xzy}{4} \end{aligned}\right\} \text{ισχύει το αξίωμα 1}$$

Και ελέγχω αν ισχύουν τα υπόλοιπα αξιώματα.

6) $G=\{2^n\cdot 3^m\in\mathbb{Q} \mid n,m\in\mathbb{Z}\}$ Ορίζουμε στο σύνολο G μια πράξη $*$ ως εξής

$$(2^{n_1}\cdot 3^{m_1})*(2^{n_2}3^{m_2})=2^{n_1+n_2}\cdot 3^{m_1+m_2} \quad (\text{ο συνήθης πολ/σμος})$$

Τότε το ζεύγος $(G,*)$ είναι αβελιανή ομάδα.

8) Αν $G=\{\alpha\}$, τότε ορίζοντας $\alpha * \alpha = \alpha$, τότε το ζεύγος $(G,*)$ είναι αβελιανή ομάδα

9) $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ Το ζεύγος $(U,\cdot)$, όπου $\cdot$ ο συνήθης πολ/μος μιγαδικών. είναι μια αβελιανή ομάδα Πράγματι αν $z,w\in U \Rightarrow |z|=1=|w|$

$|z\cdot w| = 1 = |z|\cdot|w| = 1 \Rightarrow$ Άρα $z,w\in U \Rightarrow z\cdot w\in U$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι ο αριθμός $1\in U$ και αν $z\in U$, τότε $z\neq 0$, $\exists$ ο αντίστροφος του

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{1}{|z|} = 1$$

Άρα $(U,\cdot)$: αβελιανή Ομάδα.

10) $\forall\ n\geq 1$, θέτουμε: $U_n=\{z\in\mathbb{C} \mid z^n=1\}$. Το ζεύγος $(U_n,\cdot)$, όπου $\cdot$ συνήθης πολ/μος μιγαδικών αριθμών είναι μια αβελιανή ομάδα, η οποία καλείται η ομάδα των n-οστών ριζών της μονάδας.

- Αν z,w $U_n \Rightarrow z^n=1=w^n$ και τότε $(z\cdot w)^n = z^n\cdot w^n = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow zw \in U_n \rightarrow$ η πράξη είναι καλά ορισμένη
το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο, και το αντίστροφο του $z\in U_n$ είναι το z^{-1}

$U_1=\{1\}$, $U_2=\{1,-1\}$, $U_3=\left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

$U_4=\{1,-1,i,-i\}$

32

$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$, $n \geq 1$. Το ζεύγος $(\mathbb{Z}_n, +)$, όπου

$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$, αποτελεί μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο την κλάση $[0]_n$ και το αντίστροφο στοιχείο $[a]_n$ είναι η $[-a]_n$.

Άρα $\forall n \geq 1$, υπάρχει μια αβελιανή ομάδα, η $(\mathbb{Z}_n, +)$ με πλήθος στοιχείων ίσο με n.

Θεωρούμε την πράξη πολ/μου κλάσεων υπολοίπων mod n: $[a]_n \cdot [b]_n \underset{\text{ορ}}{=} [ab]_n$.

Θεωρούμε το σύνολο $U(\mathbb{Z}_n) = \{[a]_n \in \mathbb{Z}_n\} / (a,n) = 1\}$
$\Rightarrow$ είναι μια Αβελιανή ομάδα, με πλήθος στοιχείων $\phi(n) \rightarrow$ συνάρτηση Euler.